ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα **133**
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα **51**
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα **185**
Α4.

- **α.** Λάθος
- **β.** Σωστό
- **γ.** Σωστό
- **δ.** Σωστό
- **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\{x \in D_f, g(x) \in D_f\} = \{x \geq 2, \sqrt{x-2}+1 > 1\} = \{x \geq 2, \sqrt{x-2} > 0\} = \{x > 2\} = (2, +\infty)$

Άρα $D_h = (2, +\infty)$

$$h(x) = (fog)(x) = f\big(g(x)\big) = 2\ln\big(\sqrt{x-2}+1-1\big) = 2\ln\big(\sqrt{x-2}\big) = 2\ln(x-2)^{\frac{1}{2}} = \ln\,(x-2)$$

Άρα $h(x) = \ln(x-2)\,, x \in (2, +\infty)$

Β2. Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο D_h με $h'(x) = \frac{1}{x-2}(x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$

Η h είναι συνεχής με $h'(x) > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα "1-1" κι άρα αντιστρέφεται

$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = e^{\ln(x-2)} \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow e^y + 2 = x$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$

Β3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\ln\,(x-2)\cdot\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{2\ln(x-1)}{x-2} = -\infty\cdot 2 = -\infty,$

αφού $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2\ln(x-1)}{x-2} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 2}\frac{2\cdot\frac{1}{x-1}}{1} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2}{x-1} = 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ άρα το όριο $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

Αν κ $\neq$ 0, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\kappa x)^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\kappa\, x)$

- Αν κ < 0, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} (\kappa\, x) = -\infty$, άτοπο
- Αν κ > 0, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} (\kappa\, x) = +\infty$, άτοπο

Αν κ = 0, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mu x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mu x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mu}{x} = 0$ δεκτό. Άρα **κ = 0**

ii. Η ευθεία y=x εφάπτεται στη γραφική παράσταση της στο f στο (0,0).

Με κ = 0, f(x) = $\frac{\mu x}{x^2+1}$ και $f'(x) = \frac{\mu(x^2+1) - \mu x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

Η κλίση της εφαπτομένης στο (0,0) είναι $f'(0) = 1$.

Άρα $f'(0) = \frac{\mu(1-0)}{1^2} = \mu = 1$.

Γ2. Μελέτη της $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

i. Η παράγωγος είναι $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

x	-∞		-1		1		+∞
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Το πρόσημο της f' είναι θετικό στο (-1,1) και αρνητικό στα $(-\infty, -1)$ και (1,+∞).

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και [1,+∞), και γνησίως αύξουσα στο [-1, 1].

Παρουσιάζει:

- Τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ το $f(-1) = -\frac{1}{2}$.
- Τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 1$ το $f(1) = \frac{1}{2}$.

ii. Για το σύνολο τιμών, βρίσκουμε τα όρια:

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$.
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$.

Η f ορισμένη συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ άρα $f(\Delta_1) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$

Η f ορισμένη συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [-1, 1]$ άρα $f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Η f ορισμένη συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3 = [1, +\infty)$ άρα $f(\Delta_3) = \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

Άρα το σύνολο τιμών είναι το $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$.

Επειδή $f(x) \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\frac{1}{2} + \alpha^2 \geq \frac{1}{2}$, η εξίσωση μπορεί να έχει λύση μόνο αν τα δύο μέλη είναι ίσα με $\frac{1}{2}$.

Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $\alpha = 0$, οπότε προκύπτει $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$. Άρα έχει ακριβώς **μία** ρίζα για $\alpha = 0$ και καμία ρίζα για $\alpha \neq 0$.

Γ3. $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx$. Άρα $I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx$

i. $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\cdot(x^2+1)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}dx =$

$$= \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

ii. $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2}[\ln 2 - ln1] = \frac{1}{2}ln2$

Αφού $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$, $\nu \in \mathbb{N}$ για $\nu = 0$ έχουμε:

$I_0+I_1=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}ln2+I_1=\frac{1}{2}\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ln2$

Και για $\nu=1$ έχουμε:

$I_1+I_2=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ln2+I_2=\frac{1}{4}\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}ln2-\frac{1}{4}$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η g ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής

Αρκεί να αποδείξουμε ότι έχει μια και μοναδική ρίζα στο $(0,1)$ η εξίσωση:

$g(x)+x=0\Leftrightarrow\varphi(x)=0$ (1), όπου $\varphi(x)=g(x)+x,\ x\in[-1,0]$

<u>Ύπαρξη:</u>

Η φ είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

Είναι $\varphi(-1)=g(-1)-1<0$, διότι $g(-1)<1$

Και $\varphi(0)=g(0)>0$

Επομένως από θεώρημα Bolzano η (1) έχει ρίζα $x_1\in(-1,0)$

<u>Μοναδικότητα:</u>

Έστω ότι η (1) έχει περισσότερες από μία ρίζες στο $(-1,0)$ και ρ_1,ρ_2 δύο από αυτές.

Η φ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle στο $[\rho_1,\rho_2]\subseteq[-1,0]$,συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=g'(x)+1$ και επιπλέον $\varphi(\rho_1)=0=\varphi(\rho_2)$

Άρα υπάρχει $\rho\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(\rho)=0\Leftrightarrow g'(\rho)+1=0\Leftrightarrow g'(\rho)=-1$, άτοπο διότι $g'(x)\neq-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επομένως , η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $x_1\in(-1,0)$.

Δ2. Είναι $f(0)=0$ κι έχουμε:

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2(g(x)+x)}{x}=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\eta\mu x}{x}+\frac{\varepsilon\varphi x}{x}-\kappa\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\eta\mu x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\kappa\right)=$$

$$=2+1-\kappa=3-\kappa$$

Η f παραγωγίσιμη στο 0 άρα $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow 0=3-\kappa\Leftrightarrow \kappa=3$

Δ3. *Μελέτη στο* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Έχουμε $f(x)=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x$.

i) $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3$.

Θέτοντας $u=\sigma\upsilon\nu x\in(0,1]$, *η παράσταση γίνεται* $2u+\frac{1}{u^2}-3=\frac{2u^3-3u^2+1}{u^2}==\frac{(u-1)^2(2u+1)}{u^2}\geq 0$.

Άρα $f'(x)\geq 0$ *(με το ίσον μόνο στο 0), συνεπώς η* f *είναι γνησίως αύξουσα.*

Αφού $x\geq 0\Rightarrow f(x)\geq f'(0)=0$.

ii) Η εξίσωση $3f(x)=\pi\Leftrightarrow f(x)=\frac{\pi}{3}$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$f(0)=0$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x=3x)=2+(+\infty)-\frac{3\pi}{2}=+\infty$$

Άρα $f(\Delta_1)=[0,+\infty)$.

Η f *συνεχής στο Δ1 και* $\frac{\pi}{3}\in f(\Delta_1)=[0,+\infty)$ *άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα*

$x_2\in[0,\frac{\pi}{2})$ *τέτοιο ώστε* $f(x)=\frac{\pi}{3}$ *και επειδή η* f *γνησίως αύξουσα στο Δ1 το* x_2 *μοναδικό.*

Δ4.

i. $\varphi'(x)=g'(x)+1\neq 0$ και συνεχής στο $[-1,0]$. Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο και άρα η φ γνησίως μονότονη. Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η φ γνησίως φθίνουσα, δηλαδή $\varphi'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_1,0)$. Τότε :

$x_1<0\Rightarrow\varphi(x_1)>\varphi(0)\Rightarrow 0>g(0)$, *άτοπο διότι* $0<g(x)<1$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

Συνεπώς $\varphi'(x)>0$ *για κάθε* $x\in(x_1,0)$ *και άρα* $\varphi(x)$ *γνησίως αύξουσα στο* $[x_1,0]$.

Στο $[x_1, 0]$, ισχύει ότι $x \geq x_1 \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(x_1) = 0 \Rightarrow g(x) + x \geq 0$

Αφού $x^2 \geq 0$, έπεται πως $f(x) = x^2(g(x) + x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$.

ii.Ο άξονας y'y(x=0) χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Εφόσον η $f(x) \geq 0$ σε όλο το διάστημα, έχουμε:

$\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{x_2} f(x)dx =$

Γνωρίζουμε ότι $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$.

$\int_0^{\pi/3}(2\eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x)dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = (-1 - \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6}) - (-2 - 0 - 0) = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$

$\int_{x_1}^{0} x^2 (g(x) + x)dx = \int_{x_1}^{0} x^2 (g(x)dx + \int_{x_1}^{0} x^3\, dx = \int_{x_1}^{0} x^2 (g(x)dx - \frac{{x_1}^4}{4}$

Άρα , $\int_{x_1}^{0} x^2 (g(x)dx = \frac{{x_1}^4}{4} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$

$\int_{x_1}^{0} x^3 (g'(x)dx = [x^3 g(x)]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2\, g(x)dx = {x_1}^4 - 3\left(\frac{{x_1}^4}{4} + 1 + ln2 - \frac{\pi^2}{6}\right) =$

$= \frac{{x_1}^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$

Επιμέλεια : Δελενίκα Μαρία , Ζαφείρης Βασίλειος , Τσίμος Βασίλειος , Αγοργιαννίτης Γιάννης , Βερέμης Δημήτριος , Φανός Γιάννης , Μίχου Αγνή .

νέο φροντιστήριο

57 ΧΡΟΝΙΑ ΔΙΔΑΣΚΟΥΜΕ ΤΗΝ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

www.neo.edu.gr