ΘΕΜΑ Α

Α1. β

Α2. δ

Α3. α

Α4. β

Α5. **α)** Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. → Σωστό το **β**

Αιτιολόγηση: Η εξίσωση του Einstein $K = E_{φωτ} - φ \Rightarrow \dfrac{hc}{λ} = φ + K \quad (1)$

1η περίπτωση: $\dfrac{hc}{λ} = φ + K$

2η περίπτωση: $\dfrac{hc}{λ'} = φ + K' \Rightarrow \dfrac{hc}{\frac{λ}{2}} = φ + 4K \Rightarrow 2\dfrac{hc}{λ} = φ + 4K \overset{(1)}{\Rightarrow} 2(φ + K) = φ + 4K \Rightarrow$

$\Rightarrow 2φ + 2K = φ + 4K \Rightarrow φ = 2K$

Β2 → Σωστό το **β**

Αιτιολόγηση: Όταν ο μεταγωγός διακόπτης είναι στη θέση (Ι), η ένταση του ρεύματος όταν αυτό σταθεροποιηθεί είναι:

$$I_0 = \frac{E}{R_π + R} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{E}{2R}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου έχει μειωθεί στο 25 % αυτής που είχε στην πλήρη αποκατάσταση του ρεύματος, οπότε:

$$U_{B(1)} = \frac{25}{100} U_{B(max)} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} L i_1^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2} L I_0^2 \;\Rightarrow\; i_1 = \frac{I_0}{2} \;\Rightarrow\; i_1 = \frac{E}{4R}$$

Επίσης, τη χρονική στιγμή t_1, η απόλυτη τιμή της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου είναι:

$$i_1 = \frac{|E_{AYT(1)}|}{R_\pi + R} \;\Rightarrow\; |E_{AYT(1)}| = i_1 \cdot 2R \;\Rightarrow\; |E_{AYT(1)}| = \frac{E}{4R} \cdot 2R \;\Rightarrow\; |E_{AYT(1)}| = \frac{E}{2}$$

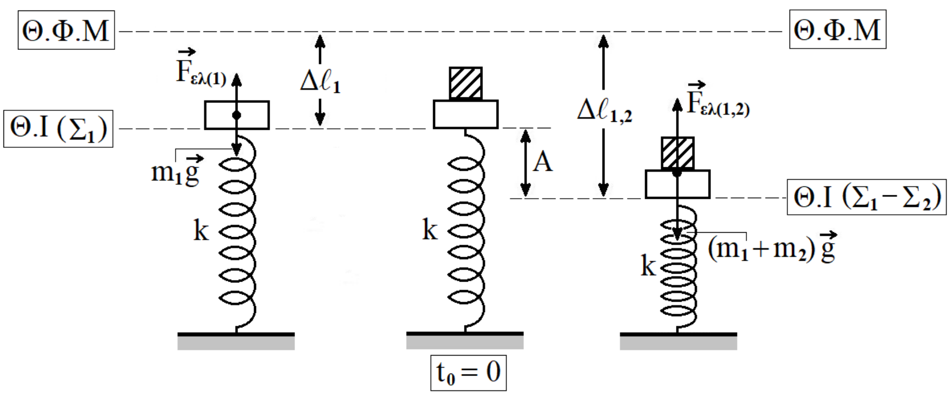
Τελικά, τη χρονική στιγμή t_1, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου, είναι:

$$\frac{dU_B}{dt} = -|E_{AYT(1)}| \cdot i_1 \;\Rightarrow\; \frac{dU_B}{dt} = -\frac{E}{2} \cdot \frac{E}{4R} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\frac{dU_B}{dt} = -\frac{E^2}{8R}}$$

Β3.

Α → Σωστό το **γ**

<u>Αιτιολόγηση:</u> Τη στιγμή κατά την οποία αφήνουμε το σώμα Σ_2 πάνω στο σώμα Σ_1, το σύστημα αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, χωρίς αρχική ταχύτητα, επομένως ξεκινά από ακραία θέση, δηλαδή η θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 αποτελεί την ακραία θέση της ταλάντωσης του συστήματος των Σ_1 και Σ_2.



Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1, έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; k \cdot \Delta\ell_1 = m_1 g \;\Rightarrow\; \Delta\ell_1 = \frac{mg}{k}$$

Στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων $\Sigma_1 - \Sigma_2$, έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; k \cdot \Delta\ell_{1,2} = (m_1 + m_2)g \;\Rightarrow\; \Delta\ell_{1,2} = \frac{4mg}{k}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει πως το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος είναι:

$$A = \Delta\ell_{1,2} - \Delta\ell_1 \;\Rightarrow\; A = \frac{4mg}{k} - \frac{mg}{k} \;\Rightarrow\; A = \frac{3mg}{k}$$

Άρα, η ενέργεια της ταλάντωσης του συστήματος είναι:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \;\Rightarrow\; E = \frac{1}{2}k\left(\frac{3mg}{k}\right)^2 \;\Rightarrow\; E = \frac{1}{2}k\frac{9m^2g^2}{k^2} \;\Rightarrow\; \mathbf{E = \frac{9m^2g^2}{2k}}$$

Β → Σωστό το **α**

<u>Αιτιολόγηση:</u> Το ταλαντούμενο σύστημα θα ακινητοποιηθεί στιγμιαία για πρώτη φορά στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, τη χρονική στιγμή:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \;\Rightarrow\; t - t_0 = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}} \;\Rightarrow\; \mathbf{t = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Ταχύτητα και Χρονική Στιγμή

Η απόσταση κορυφής – κοιλάδας αντιστοιχεί στο μισό του μήκους κύματος: $\lambda / 2 = 4 \Rightarrow \lambda = 8\text{m}$.

Η πλήρης ταλάντωση διαρκεί όσο μία περίοδος: $T = 2$ s.

Η ταχύτητα διάδοσης είναι: $u = \frac{\lambda}{T} = \frac{8}{2} \Rightarrow u = 4$ m/s.

Το κύμα φτάνει στο σημείο Μ (x_M=2m) τη στιγμή: $t_{start} = \frac{x_M}{u} = \frac{2}{4} = 0{,}5$ s.

Για να φτάσει στην πρώτη κορυφή (+Α), χρειάζεται επιπλέον χρόνο ίσο με Τ/4 = 0,5s.

Άρα: $t_1 = t_{start} + \frac{T}{4} = 0{,}5 + 0{,}5 \Rightarrow t_1 = 1$ s.

Γ2. i. Εξίσωση Κύματος και Απομάκρυνση

Η κυκλική συχνότητα είναι: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$.

Η εξίσωση του κύματος είναι: $y = 5 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right) = 5 \cdot \eta\mu\pi\left(t - \dfrac{x}{4}\right)$, (S.I.)

Για το σημείο Ν (x_N=6m), τη στιγμή t_1=6s: $y_N = 5 \cdot \eta\mu\pi\left(6 - \dfrac{6}{4}\right) = 5 \cdot \eta\mu(4,5\pi) = 5 \text{ m}$.

ii. Ρυθμός Μεταβολής Ορμής: $\dfrac{dp}{dt} = \Sigma F = -m \cdot \omega^2 \cdot y \Rightarrow \dfrac{dp}{dt} = -0,05 \cdot \pi^2 \cdot 5 \Rightarrow \dfrac{dp}{dt} = -2,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σημείου Ν είναι $-2,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η δύναμη (και άρα ο ρυθμός μεταβολής της ορμής) έχει φορά προς τη θέση ισορροπίας, αντίθετη από τη θετική απομάκρυνση.

Γ3. Διαγράμματα Φάσης - Χρόνου

Η φάση δίνεται από τον τύπο: $\phi = \pi\left(t - \dfrac{x}{4}\right)$, για $t \geq \dfrac{x}{4}$.

Για το σημείο Μ (x_M=2m): $\phi_M = \pi(t - 0,5)$, για $t \geq 0,5$ s

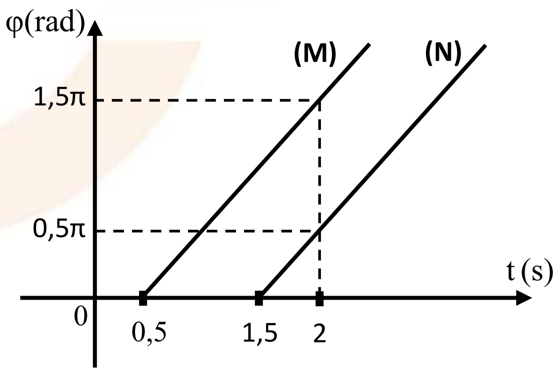
Για $\varphi_M \geq 0 \Rightarrow t \geq 0,5\text{s}$

Για $t = 2\text{s} \Rightarrow \varphi_K = 1,5\pi \text{ rad}$

Για το σημείο Ν (x_N=6m): $\phi_N = \pi(t - 1,5)$, για $t \geq 1,5$ s

Για $\varphi_N \geq 0 \Rightarrow t \geq 1,5\text{s}$

Για $t = 2\text{s} \Rightarrow \varphi_N = 0,5\pi \text{ rad}$



Γ4. Νέα Συχνότητα και Απόσταση

Νέα συχνότητα $f' = 2f = 2 \cdot (1/2) = 1 \text{ Hz}$. Άρα $T' = 1 \text{ s}$.

Η ταχύτητα υ παραμένει 4 m/s, άρα το νέο μήκος κύματος είναι $\lambda' = v \cdot T' = 4 \text{ m}$.

Όταν το Μ είναι στο $y_M = +5\ m$, εξετάζουμε τη θέση του Ν.

Η απόσταση των σημείων στον άξονα x είναι $\Delta x = x_N - x_M = 6 - 2 = 4\ m$.

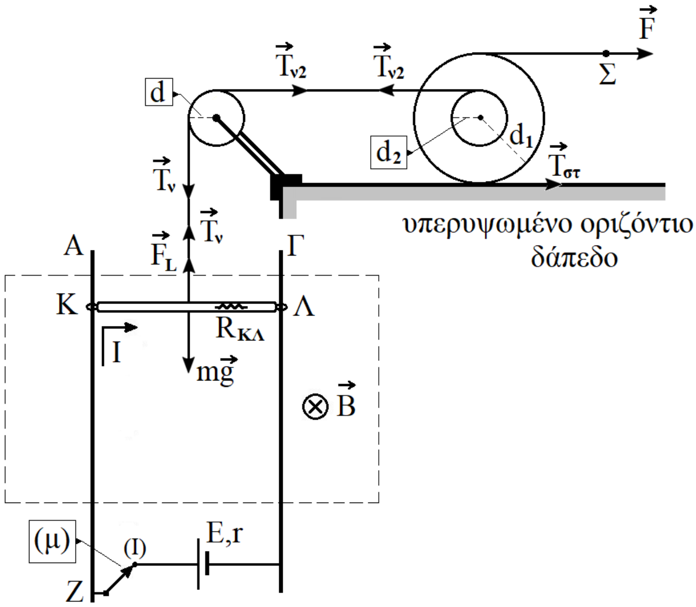
Παρατηρούμε ότι $\Delta x = 4\ m = 1\lambda'$. Εφόσον η απόσταση είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του λ', τα σημεία είναι σε φάση. Άρα και το Ν θα βρίσκεται στο $y_N = +5\ m$.

Επειδή έχουν το ίδιο y, η απόστασή τους είναι η οριζόντια απόσταση στον άξονα: $d = \Delta x = 4\ m$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$I = \frac{E}{R_{K\Lambda} + r} \Rightarrow I = \frac{5}{2{,}5} \Rightarrow I = 2A$$



Η δύναμη Laplace που δέχεται ο αγωγός από το μαγνητικό πεδίο έχει φορά προς τα πάνω, όπως προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού, και το μέτρο της είναι:

$$F_L = B \cdot I \cdot \ell \Rightarrow F_L = 2N$$

Από την ισορροπία του αγωγού ΚΛ, έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_\nu + F_L - mg = 0 \Rightarrow T_\nu = 3N$$

Από τη στροφική ισορροπία της τροχαλίας, προκύπτει:

$$\Sigma\tau_{(cm)} = 0 \Rightarrow T_\nu \cdot d - T_{\nu 2} \cdot d = 0 \Rightarrow T_{\nu 2} = 3N$$

Από τη στροφική ισορροπία του δίσκου, έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(cm)} = 0 \Rightarrow T_{\nu 2} \cdot d_2 + T_{\sigma\tau} \cdot d_1 - F \cdot d_1 = 0 \Rightarrow T_{\nu 2} \cdot 0{,}1 + T_{\sigma\tau} \cdot 0{,}3 = F \cdot 0{,}3 \Rightarrow$$

$$3 \cdot 0{,}1 + T_{\sigma\tau} \cdot 0{,}3 = F \cdot 0{,}3 \Rightarrow 1 + T_{\sigma\tau} = F \Rightarrow T_{\sigma\tau} = F - 1 \quad \textbf{(1)}$$

Από τη μεταφορική ισορροπία του δίσκου στον άξονα x′x, προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + T_{\sigma\tau} - T_{\nu 2} = 0 \xrightarrow{(1)} F + F - 1 - T_{\nu 2} = 0 \Rightarrow 2F = T_{\nu 2} + 1 \Rightarrow$$
$$2F = 3 + 1 \Rightarrow \boldsymbol{F = 2N}$$

Δ2. Επειδή ο δίσκος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση, θα ισχύουν οι συνθήκες:

$u_{cm} = \omega \cdot d_1$ και $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot d_1$

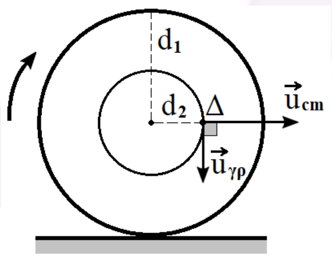
Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου είναι:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot d_1 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{d_1} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{20}{3}\frac{rad}{s^2}$$

Το μήκος του νήματος (1) που ξετυλίγεται, είναι:

$$\Delta\ell = \Delta S \Rightarrow \Delta\ell = \Delta\theta \cdot d_1 \Rightarrow \Delta\ell = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 \cdot d_1 \Rightarrow \Delta\ell = \frac{1}{2}\cdot\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 0{,}3 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell = 0,25m}$$

Έστω Δ το σημείο της εγκοπής που απέχει απόσταση d1 από το έδαφος τη χρονική στιγμή t = 0,5 s.
Η γραμμική ταχύτητα του σημείου Δ είναι:



$$u_{\gamma\rho(\Delta)} = \omega \cdot d_2 \Rightarrow u_{\gamma\rho(\Delta)} = \omega \cdot \frac{d_1}{3} \Rightarrow u_{\gamma\rho(\Delta)} = \frac{u_{cm}}{3}$$

Η ταχύτητα του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t, είναι:

$$\vec{u}_\Delta = \vec{u}_{cm} + \vec{u}_{\gamma\rho(\Delta)} \Rightarrow u_\Delta = \sqrt{u_{cm}^2 + u_{\gamma\rho(\Delta)}^2} \Rightarrow u_\Delta = \sqrt{u_{cm}^2 + \left(\frac{u_{cm}}{3}\right)^2} \Rightarrow$$

$$u_\Delta = \sqrt{u_{cm}^2 + \frac{u_{cm}^2}{9}} \Rightarrow u_\Delta = \sqrt{\frac{10 \cdot u_{cm}^2}{9}} \Rightarrow u_\Delta = \frac{u_{cm}\sqrt{10}}{3} \Rightarrow u_\Delta = \frac{\alpha_{cm} \cdot t\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \boldsymbol{u_\Delta = \frac{\sqrt{10}}{3}\frac{m}{s}}$$

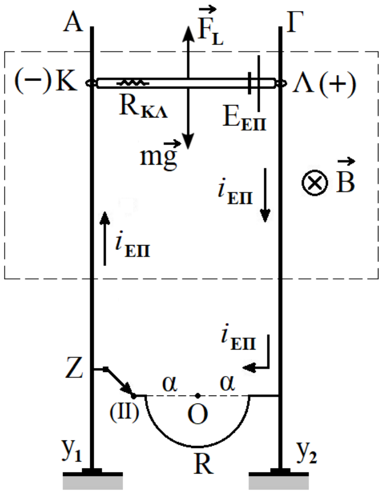
Δ3. Με την κίνηση του αγωγού έχουμε μεταβολή της μαγνητικής ροής και ως εκ τούτου στα άκρα του αγωγού ΚΛ εμφανίζεται επαγωγική τάση:

$$E_{\varepsilon\pi} = B \cdot u \cdot \ell$$

Η πολικότητα της επαγωγικής τάσης, προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού για τη δύναμη Lorentz που ασκείται στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού ΚΛ και είναι αυτή του διπλανού σχήματος.

Αφού το κύκλωμα είναι κλειστό, θα διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$i_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}} \quad \Rightarrow \quad i_{\varepsilon\pi} = \frac{B \cdot u \cdot \ell}{R_{o\lambda}}$$



Επειδή ο αγωγός βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου και διαρρέεται από ρεύμα, θα δέχεται από το μαγνητικό πεδίο δύναμη Laplace, η οποία θα έχει μέτρο:

$$F_L = B \cdot i_{\varepsilon\pi} \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad F_L = B \cdot \frac{B \cdot u \cdot \ell}{R_{o\lambda}} \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad F_L = \frac{B^2 \cdot u \cdot \ell^2}{R_{o\lambda}}$$

Από την παραπάνω σχέση είναι εμφανές ότι για όσο χρόνο μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού, θα μεταβάλλεται και το μέτρο της δύναμης Laplace.

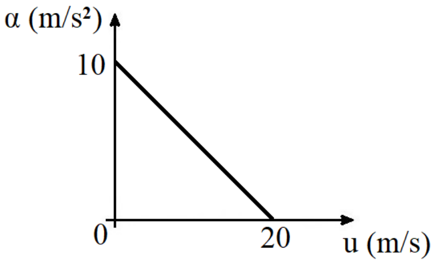
Από τον 2^o νόμο του Newton για την κίνηση του αγωγού έχουμε:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{mg - F_L}{m} \;\Rightarrow\; \alpha = g - \frac{B^2 u \ell^2}{m(R_{K\Lambda} + R)} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\alpha = 10 - \frac{u}{2}\ \mu\varepsilon\ 0 \leq u \leq u_{o\rho}}$$

Ο αγωγός αποκτά την οριακή του ταχύτητα, όταν μηδενίζεται η επιτάχυνσή του, οπότε:

$$\alpha = 0 \;\Rightarrow\; 10 - \frac{u_{o\rho}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u_{o\rho} = 20\frac{m}{s}}$$

Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του αγωγού ΚΛ σε συνάρτηση με την ταχύτητα του αγωγού είναι φθίνουσα γραμμική και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δ4. Από τη χρονική στιγμή t_1 που αποκτά ο αγωγός ΚΛ την οριακή του ταχύτητα και μετά, η κίνησή του θα είναι ευθύγραμμη ομαλή. Οπότε στη χρονική διάρκεια t_1 έως $t_2 = t_1 + 0{,}04$ s, δηλαδή στη χρονική διάρκεια $\Delta t = 0{,}04$ s, η μετατόπισή του θα είναι:

$$\Delta y = u_{o\rho} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta y = 20 \cdot 0{,}04 \Rightarrow \Delta y = 0{,}8m$$

Η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα, όταν ο αγωγός κινείται με την οριακή του ταχύτητα είναι:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{B \cdot u_{o\rho} \cdot \ell}{R_{K\Lambda} + R} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{20}{4} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = 5A$$

Το έργο της δύναμης Laplace, στην παραπάνω χρονική διάρκεια είναι:

$$W_{F_L} = -F_L \cdot \Delta y \;\Rightarrow\; W_{F_L} = -B \cdot I_{\varepsilon\pi} \cdot \ell \cdot \Delta y \;\Rightarrow\; \boldsymbol{W_{F_L} = -4J}$$

Το επαγωγικό φορτίο είναι:

$$q_{\varepsilon\pi} = I_{\varepsilon\pi} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{\varepsilon\pi} = 5 \cdot 0{,}04 \Rightarrow \boldsymbol{q_{\varepsilon\pi} = 0,2C}$$

Η θερμότητα που εκλύεται από τον αγωγό ΚΛ, είναι:

$$Q_{R_{K\Lambda}} = I_{\varepsilon\pi}^2 \cdot R_{K\Lambda} \cdot \Delta t \Rightarrow Q_{R_{K\Lambda}} = 25 \cdot 2 \cdot 0{,}04 \Rightarrow \boldsymbol{Q_{R_{K\Lambda}} = 2J}$$

Δ5. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αγωγού είναι:

$$V_{\Lambda K} = -V_{K\Lambda} \Rightarrow V_{\Lambda K} = 2V$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα εκείνη τη στιγμή είναι:

$$i_{\varepsilon\pi} = \frac{V_{\Lambda K}}{R} \Rightarrow i_{\varepsilon\pi} = 1A$$

Το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ, είναι:

$$i_{\varepsilon\pi} = \frac{B \cdot u \cdot \ell}{R_{K\Lambda} + R} \Rightarrow u = 4\frac{m}{s}$$

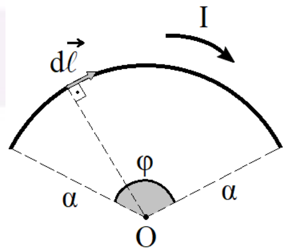
Εκείνη τη στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού ΚΛ είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(W_{\Sigma F})}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dy}{dt} = \Sigma F \cdot u \Rightarrow \frac{dK}{dt} = (mg - F_L) \cdot u \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = (mg - B \cdot i_{\varepsilon\pi} \cdot \ell) \cdot u \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{\frac{dK}{dt} = 16\frac{J}{s}}$$

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ένας αγωγός που αποτελεί τμήμα κύκλου μήκους S και ακτίνας α, υπολογίζεται ως εξής:

Πρώτα υπολογίζουμε *(χρησιμοποιώντας τον νόμο των Biot και Savart)* το μέτρο του $d\vec{B}$ που δημιουργεί στο κέντρο O ένα στοιχειώδες τμήμα $d\vec{\ell}$, οπότε έχουμε:



$$dB_O = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\alpha^2} d\ell \cdot \eta\mu 90^o$$

(ημθ = ημ90^o γιατί το $d\vec{\ell}$ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο)

Στη συνέχεια, για το μέτρο της συνολικής έντασης $\vec{B}_O$ έχουμε:

$$B_O = \sum dB_O \Rightarrow B_O = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\alpha^2} \sum d\ell \xrightarrow{\sum d\ell = S} B_O = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\alpha^2} \cdot S \xrightarrow{S = \varphi \cdot \alpha}$$

$$B_O = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\alpha^2} \cdot \varphi \cdot \alpha \Rightarrow B_O = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\alpha} \cdot \varphi$$

όπου φ είναι η επίκεντρη γωνία στην οποία βαίνει το τόξο S. Για την περίπτωση ημικυκλικού αγωγού είναι φ = π rad. Οπότε η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο O του ημικυκλικού αγωγού, όταν ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει είναι $i_{\varepsilon\pi} = 1A$, είναι:

$B_O = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i_{\varepsilon\pi}}{\alpha} \cdot \pi \Rightarrow B_O = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-6} \Rightarrow \boldsymbol{B_O = 5\pi \cdot 10^{-7} T}$, με φορά $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{0}}$ ⊗.