

Θέμα Α

A1. Σχολικό σελίδα 135

A2. Σχολικό σελίδα 161

A3. Σχολικό σελίδα 76

A4.

- α. Λ
- β. Σ
- γ. Λ
- δ. Σ
- ε. Λ

Θέμα Β

B1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x = 0 \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x > 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x < 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$

Επομένως η f έχει παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = -1$ το $f(-1) = -\frac{1}{e}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

B2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)e^x = 0 \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x+2)e^x > 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $[-2, +\infty)$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow (x+2)e^x < 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$. Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -2]$

Άρα το σημείο $(-2, f(-2))$ με $f(-2) = -\frac{2}{e^2}$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

B3. Υπολογίζουμε:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x) = +\infty$

- Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε στο διάστημα αυτό έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-\frac{1}{e}, 0)$
- Στο διάστημα $\Delta_2 = [-1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε στο διάστημα αυτό έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-\frac{1}{e}, +\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-\frac{1}{e}, +\infty)$

B4. Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $f(x) \geq 0$, άρα:

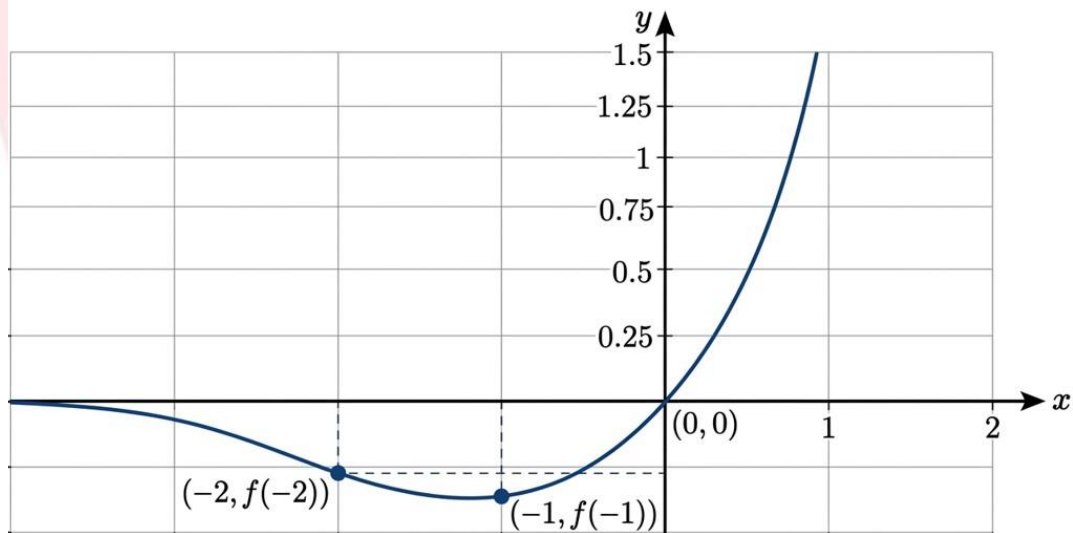
$$E(\Omega) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)' dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1 \text{ τ.μ.}$$

B5. Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ κι άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ τον άξονα xx'
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Άρα η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	↘		↘	↗

Γραφική Παράσταση της $f(x) = xe^x$



Θέμα Γ

Γ1. Είναι $f(x) + e^{f(x)} = x, x \in \mathbb{R} \xrightarrow{x=1} f(1) + e^{f(1)} = 1$ (I)

Θεωρούμε την $g(x) = x + e^x, x \in \mathbb{R}$ με $g'(x) = 1 + e^x > 0, x \in \mathbb{R}$ κι άρα $g \nearrow$ στο \mathbb{R} και $g(0) = 1$

Από (I) $\Rightarrow g(f(1)) = g(0) \xrightarrow{g \nearrow} f(1) = 0$

Γ2. Αφού $f(x) + e^{f(x)} = x, x \in \mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη, τότε: $f'(x) + e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \cdot [1 + e^{f(x)}] = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+e^{f(x)}}, x \in \mathbb{R}$. Άρα $f'(x) > 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \nearrow$ στο \mathbb{R}

Επίσης $f'(x) = \frac{1}{1+e^{f(x)}}$ και επειδή f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε και η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα υπάρχει η f'' στο \mathbb{R} .

Άρα $f''(x) = \left(\frac{1}{1+e^{f(x)}}\right)' = -\frac{1}{(1+e^{f(x)})^2} \cdot (1 + e^{f(x)})' = -\frac{1}{(1+e^{f(x)})^2} \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) < 0$ στο \mathbb{R}

Άρα $f \curvearrowright$ στο \mathbb{R} και επομένως $f' \searrow$ στο \mathbb{R} .

$$\Gamma 3. \text{ Αρκεί να δείξουμε ότι } \lambda_{AM} < \lambda_{MB} \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(1)}{x-1} > \frac{f(2)-f(x)}{2-x} \quad (II)$$

Αν εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ για την f στο $[1, x]$ τότε υπάρχει $\xi_1 \in (1, x)$ ώστε: $f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Ομοίως, με Θ.Μ.Τ για την f στο $[x, 2]$ θα υπάρχει $\xi_2 \in (x, 2)$ ώστε: $f'(\xi_2) = \frac{f(2)-f(x)}{2-x}$

Οπότε $(II) \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} \xi_1 < \xi_2$, που ισχύει αφού $\xi_1 \in (1, x)$ και $\xi_2 \in (x, 2)$.

$\Gamma 4. \alpha$. Ισχύει $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$. Άρα $e^x \geq x, x \in \mathbb{R}$

Βάζοντας όπου x το $f(x)$ τότε $e^{f(x)} \geq f(x), x \in \mathbb{R}$.

β . Επειδή $f \nearrow$ και συνεχής στο \mathbb{R} , το σύνολο τιμών της f θα είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

Καθώς η f είναι κοίλη στο \mathbb{R} , η C_f θα είναι “κάτω” από οποιαδήποτε εφαπτομένη της.

Βρίσκουμε την εφαπτομένη της στο $(1, f(1))$:

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Άρα $f(x) \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = -\infty$ τότε και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Επίσης, αφού $e^{f(x)} \geq f(x), x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{f(x)} \geq x - e^{f(x)} \Leftrightarrow 2e^{f(x)} \geq x \Leftrightarrow e^{f(x)} \geq \frac{x}{2}$

$$\stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ln e^{f(x)} \geq \ln \frac{x}{2} \Leftrightarrow f(x) \geq \ln x - \ln 2, x > 0$$

και επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \ln 2) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Άρα $f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$\Gamma 5.$

α . Η f αντιστρέφεται γιατί η $f \nearrow$ στο \mathbb{R} και έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R}

$$f(x) = y$$

$$\text{Καθώς } f(x) + e^{f(x)} = x \Rightarrow y + e^y = f^{-1}(y)$$

$$x = f^{-1}(y)$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = x + e^x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\beta. \text{ Για } x \in \mathbb{R} \quad h(x) = F(x) - \int_0^2 x \cdot f^{-1}(t) dt = F(x) - x \int_0^2 f^{-1}(t) dt =$$

$$= F(x) - x \int_0^2 (t + e^t) dt = F(x) - x \cdot \left[\frac{t^2}{2} + e^t \right]_0^2 = F(x) - x \cdot (2 + e^2 - 1)$$

$$= F(x) - x \cdot (e^2 + 1)$$

Υπολογίζουμε $h'(x) = F'(x) - (e^2 + 1) \cdot x' = f(x) - (e^2 + 1), x \in \mathbb{R}$

Εξετάζω που $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - (e^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^2 + 1$

και επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και γν.αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R}

και αφού το $e^2 + 1 \in \mathbb{R}$

σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ θα υπάρχει (μοναδικό) $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = e^2 + 1$.

Δηλαδή $h'(x_0) = 0$. Άρα x_0 πιθανό ακρότατο.

Αφού η $f \nearrow$ στο \mathbb{R} για $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > e^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) - (e^2 + 1) > 0$
 $\Leftrightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow$ στο $(x_0, +\infty)$

Ομοίως $h'(x) < 0, x \in (-\infty, x_0) \Rightarrow h \searrow$ στο $(-\infty, x_0)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘		↗

Θέμα Δ

$$\Delta 1. f(x) = -|\ln x| + 1 = \begin{cases} \ln x + 1, & 0 < x < 1 \\ -\ln x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x + 1) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-\ln x + 1) = 1 \text{ και } f(1) = -\ln 1 + 1 = 1$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

Για $x \in (0, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων.

Ομοίως και στο $(1, +\infty)$. Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\ln x + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\ln x}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = -1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

$$\Delta 2. \text{ Προφανώς } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

και $f'(x) > 0$ στο $(0, 1)$, άρα $f \nearrow$ στο $(0, 1]$

Επίσης $f'(x) < 0$ στο $(1, +\infty)$, άρα $f \searrow$ στο $[1, +\infty)$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	↗		↘

Δ3.

α. Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$, $0 < \alpha < 1$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\beta > 1$

Τότε η εφαπτομένη στο A θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

Ομοίως στο B , $f'(\beta) = -\frac{1}{\beta}$

Αλλά αφού οι εφαπτόμενες είναι κάθετες θα ισχύει:

$$f'(\alpha) \cdot f'(\beta) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \left(-\frac{1}{\beta}\right) = -1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 1 \quad (I)$$

Το ευθύγραμμο τμήμα AB θα έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\lambda_{AB} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{-\ln \beta + 1 - \ln \alpha - 1}{\beta - \alpha} = \frac{-\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} \stackrel{(I)}{=} \frac{-\ln \frac{1}{\alpha} - \ln \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\ln \alpha - \ln \alpha}{\beta - \alpha} = 0$$

Άρα η ευθεία AB είναι παράλληλη στον xx' .

β. Δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Rolle γιατί η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ που είναι εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$.

Δ4. Έστω $\Gamma(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (0, 1)$. Τότε η εφαπτομένη της C_f στο Γ θα είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - (\ln x_0 + 1) = \frac{1}{x_0} (x - x_0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x_0} \cdot x - 1 + \ln x_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{x_0} \cdot x + \ln x_0$$

Η ευθεία αυτή τέμνει τον xx' στο $x = -x_0 \ln x_0$ και τον yy' στο $y = \ln x_0$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτόμενη και τους δύο άξονες θα είναι:

$$E = \frac{1}{2} |-x_0 \ln x_0| \cdot |\ln x_0|$$

Επειδή $x_0 \in (0, 1)$ τότε: $-x_0 \ln x_0 > 0$ και $\ln x_0 < 0$

$$\text{Άρα } E = \frac{1}{2} (-x_0 \ln x_0) \cdot (-\ln x_0) = \frac{1}{2} x_0 \ln^2 x_0, \quad x_0 \in (0, 1)$$

Θεωρούμε $g(x) = \frac{1}{2} x \ln^2 x$, $x \in (0, 1)$ που είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + \frac{1}{2} x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x = \frac{1}{2} \ln x \cdot [\ln x + 2]$$

Λύνουμε $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ή $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$, αφού $x \in (0, 1)$

$$\text{Και } g'(x) > 0 \stackrel{x \in (0,1)}{\iff} \ln x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < e^{-2}$$

x	0	e^{-2}	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗		↘

Άρα $\Gamma(e^{-2}, f(e^{-2}))$

$$\begin{aligned} \Delta 5. \int_1^e \frac{2f(x)f'(x)}{f^2(x)+1} dx &= \int_1^e \frac{(f^2(x)+1)'}{f^2(x)+1} dx = [\ln[f^2(x)+1]]_1^e = \ln(f^2(e)+1) - \ln(f^2(1)+1) = \\ &= \ln(0^2+1) - \ln(1^2+1) = -\ln 2 \end{aligned}$$