

Θέμα Α

- A1. Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ (Μονάδες 7)
- A2. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ; (Μονάδες 4)
- A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών. (Μονάδες 4)
- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη
- Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$
 - Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0
 - Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = -x$
 - Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση και η συνάρτηση γείναι συνεχης στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
 - Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (Μονάδες 10)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$

- B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (Μονάδες 6)
- B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής (Μονάδες 6)
- B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (Μονάδες 5)
- B4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x = 1$ (Μονάδες 4)
- B5. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f (Μονάδες 4)



Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x, x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(1) = 0$

(Μονάδες 4)

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο \mathbb{R}

(Μονάδες 4)

Γ3. Δίνονται τα σημεία $A(1, f(1)), B(2, f(2))$ και $M(x, f(x)), x \in (1,2)$. Να δείξετε ότι η κλίση της ευθείας AM είναι μεγαλύτερη από την κλίση της ευθείας MB για κάθε $x \in (1,2)$

(Μονάδες 4)

Γ4. α. Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)} \geq f(x) \quad x \in \mathbb{R}$

β. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το \mathbb{R}

(Μονάδες 2+4)

Γ5.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}

β. Αν F είναι παράγουσα της f στο \mathbb{R} , να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = F(x) - \int_0^2 x \cdot f^{-1}(t) dt \text{ έχει μοναδικό ελάχιστο στο } \mathbb{R}$$

(Μονάδες 3+4)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = -|\ln x| + 1, x > 0$

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στο πεδίο ορισμού της

(Μονάδες 5)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο πεδίο ορισμού της

(Μονάδες 5)

Δ3. Έστω $A(\alpha, f(\alpha)), 0 < \alpha < 1$ και $B(\beta, f(\beta)), \beta > 1$ δύο σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι κάθετες

α. Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι παράλληλο στον άξονα xx'

β. Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$

(Μονάδες 4+1)

Δ4. Να βρεθεί σημείο $\Gamma(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (0,1)$, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $\Gamma(x_0, f(x_0))$ με τους άξονες xx', yy' να είναι μέγιστο

(Μονάδες 6)

Δ5. Να υπολογίσετε το: $\int_1^e \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)+1} dx$

(Μονάδες 4)

Ευχόμαστε επιτυχία!